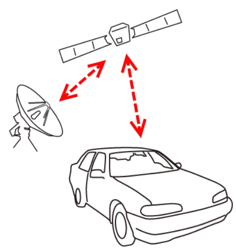
Waarover gaat de speciale relativiteitstheorie?

Beweging is relatief. Dat wil zeggen dat je de snelheid van een voorwerp altijd meet ten opzichte van iets anders. Als je in een auto zit die 50 km/h rijdt, dan bedoel je: 50 km/h ten opzichte van de grond. Je spreekt af dat de grond stil staat. Maar ten opzichte van een tegenligger die ook 50 km/h rijdt, lijkt je snelheid veel groter: 100 km/h.
Bovendien weet je dat de grond helemaal niet stil staat. De aarde draait immers in 24 uur om haar eigen as en in ruim 365 dagen om de zon. Dié snelheden meet je weer ten opzichte van de zon. Maar ook die staat niet stil... enzovoorts. Elke snelheid die je meet is relatief, dat is: gemeten ten opzichte van iets anders.

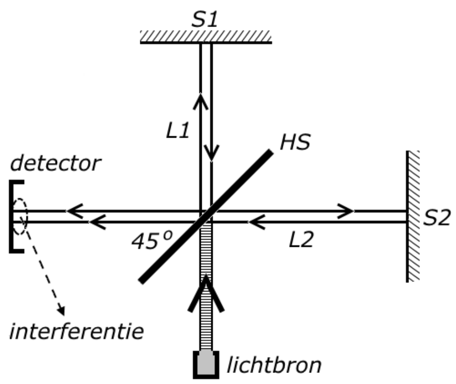


Eind 19e eeuw bleek iets bijzonders: alleen de lichtsnelheid *(c)* is niet relatief. Ten opzichte waarvan je die ook meet, altijd vind je $c = 2{,}99792458 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (in vacuüm). Raar maar waar. Je noemt de lichtsnelheid *invariant.* Daarnaast werd duidelijk dat de lichtsnelheid de grootste snelheid in de natuur is. Grotere snelheden zijn niet mogelijk.
Deze bijzondere eigenschappen van de lichtsnelheid hebben grote gevolgen voor meting van tijdsduren, afstanden en massa's. Onder gewone omstandigheden merk je daar niets van. Maar bij snelheden groter dan (ongeveer) $0{,}5 \cdot c$ wel: tijd gaat dan langzamer, afstanden worden dan korter en massa neemt dan toe.

Daarover gaat de speciale relativiteitstheorie van Einstein: over de bijzondere eigenschappen van de lichtsnelheid en de gevolgen daarvan voor tijdsduur, afstand, massa en energie.
Die gevolgen leiden tot een nieuwe, *relativistische* mechanica, die onder gewone omstandigheden niet meetbaar verschilt van de klassieke mechanica van Newton, maar bij zeer grote snelheden wel. Daarom moeten onderzoekers in laboratoria soms rekening houden met relativistische effecten. En een navigatiesysteem zoals GPS zou zonder relativistische mechanica niet mogelijk zijn.

De ether

In 1865 voorspelde Maxwell het bestaan van elektromagnetische golven, met een golfsnelheid van $3{,}0 \cdot 10^{8}$ m/s. Licht, dat dezelfde snelheid heeft, bleek ook een elektromagnetische golf. Daarom wordt die snelheid de 'lichtsnelheid' genoemd. Wetenschappers dachten toen dat deze snelheid, zoals altijd, was vastgesteld ten opzichte van iets anders, een bepaald *medium.* Dat was nog niet ontdekt maar werd alvast de 'ether' genoemd.
In 1887 wilden Michelson en Morley met een beroemd geworden experiment de snelheid van de aarde door de ether meten. Zie de schematische figuur hiernaast. Met een halfdoorlatende spiegel *(HS)* werden twee onderling loodrechte, coherente lichtbundels gemaakt *(L1* en *L2).* De twee bundels kwamen via twee andere spiegels *(S1* en *S2)* samen in een detector. Het interferentiepatroon zou moeten veranderen bij draaiing van de hele opstelling. Immers, bij de ene oriëntatie krijgt *L1* de baansnelheid van de aarde door de ether extra mee en *L2* niet, en bij een andere oriëntatie kan dat andersom zijn. Echter: draaiing had geen enkel effect!
Conclusie was dat licht zich niets aantrekt van de snelheid van de aarde door de ether. Je meet steeds hetzelfde interferentiepatroon dus ook dezelfde lichtsnelheid. Die conclusie maakt de hypothese van de ether overbodig.



De lichtsnelheid is invariant – De postulaten van Einstein

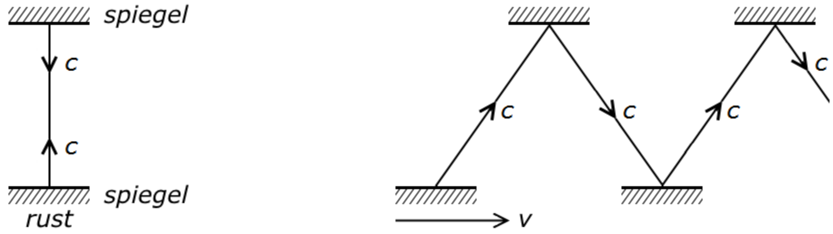
In navolging van Michelson en Morley verwierp Albert Einstein het bestaan van de ether. Om te begrijpen hoe elektromagnetische golven zich gedragen, formuleerde hij twee postulaten (uitgangspunten). Die werkte hij uit tot een theorie, die hij in 1905 publiceerde: de speciale relativiteitstheorie.

Voor waarnemers die ten opzichte van elkaar stil staan of *met constante snelheid* bewegen geldt: 1. De natuur maakt geen onderscheid. De waarnemers nemen precies dezelfde natuurwetten waar. 2. De lichtsnelheid is invariant (absoluut). Voor al deze waarnemers heeft hij dezelfde waarde, onafhankelijk van de snelheid van waarnemer of bron.

Snelheid, dus ook de lichtsnelheid, is afstand *(Δx)* per tijdsduur *(Δt).* Dat *c* invariant is heeft dus gevolgen voor *Δx* en *Δt,* voor ruimte en tijd. Die gevolgen blijken in strijd met de klassieke opvatting van Newton dat ruimte en tijd absoluut zijn. Bij 'kleine' snelheden (< $0{,}5 \cdot c$) stemmen Newton en Einstein overeen, bij grotere snelheden niet meer. Zie ook bijlage 1.

Tijdrek

Een gedachte-experiment: stel, je hebt een *lichtklok:* twee evenwijdige spiegels waartussen een foton verticaal heen en weer kaatst. Zie de linker figuur: iedere oversteek is een tik van de klok.



In de rechter figuur beweegt de klok met constante snelheid *(v)* naar rechts. Een stilstaande waarnemer ziet het foton nu een zigzagbeweging maken: eerst schuin naar boven, dan schuin naar beneden, enz. Vergeleken met de stilstaande klok legt het foton nu per tik een langere weg af. Is de lichtsnelheid invariant, dan duurt een tik van de bewegende klok dus langer dan die van de stilstaande klok.
Conclusie: een stilstaande waarnemer ziet bewegende klokken langzamer lopen. Je noemt dat tijdrek of tijddilatatie.
Met Δt de tijdsduur die op de klok van de waarnemer is verstreken en $\Delta t'$ die op de bewegende klok, geldt:

$$\Delta t = \Delta t' \cdot \gamma \qquad \text{met} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{en} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \text{en} \quad v = \textit{de snelheid van de klok}, \; c = \textit{de lichtsnelheid}$$

Iemand die met de klok mee reist merkt niets, voor hem/haar beweegt de klok immers niet. Alleen een achterblijver, een stilstaande waarnemer dus, constateert tijdrek op de bewegende klok. Ruimtereizigers vinden dus dat de klok in hun ruimteschip goed loopt. Maar achterblijvende familieleden constateren bij terugkomst van het ruimteschip dat de klok aan boord langzamer heeft gelopen. En dat alle processen in het ruimteschip langzamer zijn gegaan: groei, veroudering, radioactief verval, enzovoorts. Zie bijlage 3.

Lengtekrimp

De dichtstbijzijnde ster na de zon, *Proxima Centauri,* staat op circa 4,20 lichtjaar afstand. Stel, in de verre toekomst reist een bemand ruimteschip met een constante snelheid, $v = 0{,}60 \cdot c$ (dus $\gamma = 1{,}25$), naar een exoplaneet rond deze ster.
Tijdens de reis vindt een astronaut dat hij/zij stilstaat en juist de omgeving beweegt. De relativiteitstheorie voorspelt dat een stilstaande waarnemer bewegende afmetingen (afstanden, lengtes) korter ziet. Je noemt dat lengtekrimp, lengtecontractie of lorentzcontractie. De waarnemer-astronaut ziet dus een kortere afstand dan 4,20 lichtjaar.
Met Δx de afstand die de waarnemer-astronaut ziet en $\Delta x'$ de bewegende afstand van 4,20 lichtjaar (dus de afstand die een astronoom op aarde ziet) geldt:

$$\Delta x = \Delta x' / \gamma$$

De waarnemer-astronaut ziet dus een afstand van 4,20 / 1,25 = 3,36 lichtjaar.
Er is alleen lengtekrimp in de bewegingsrichting. Zie bijlage 4.

Tijdrek en lengtekrimp

Bekijk weer het ruimteschip uit het laatste voorbeeld.
Gemeten op een aardse klok komt het ruimteschip na 4,20 / 0,60 = 7,0 jaar bij de exoplaneet aan. Een aardse astronoom rekent uit dat de klok in het ruimteschip door tijdrek dan slechts 5,6 jaar aanwijst:

$$\Delta t = \Delta t' \cdot \gamma \quad \rightarrow \quad \Delta t' = \Delta t / \gamma = 7{,}0 / 1{,}25 = 5{,}6 \text{ jaar.}$$

Bij aankomst ziet de astronaut inderdaad dat zijn klok 5,6 jaar aanwijst. Omdat die klok ten opzichte van hem stil stond, vindt hij dat die de juiste tijd aanwijst. Hij verklaart de aanwijzing daarom anders: niet met tijdrek, maar met lengtekrimp. Vanuit zijn positie bezien stond zijn klok immers stil en bewoog juist de omgeving. Zie boven:

$$\Delta x = 3{,}36 \text{ lichtjaar} \quad \rightarrow \quad \text{reistijd} = 3{,}36 / 0{,}60 = 5{,}6 \text{ jaar.}$$

Over de klok in het ruimteschip zijn de aardse astronomen en de astronaut het dus eens: op die klok duurt de reis 5,6 jaar. Ook over de snelheid van het ruimteschip en dus over de lichtsnelheid zijn ze het eens.

Uit het eerste postulaat volgt dat tijdrek en lengtekrimp over en weer gelden. Elke stilstaande waarnemer vindt dat bewegende klokken langzamer lopen (dus dat bewegende processen langzamer gaan en langer duren) en dat bewegende afmetingen in de bewegingsrichting korter zijn.

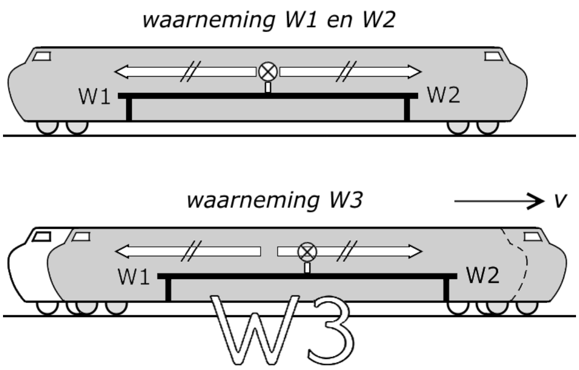
Gelijktijdigheid

Dat de waarde van de lichtsnelheid invariant is, heeft gevolgen voor het begrip gelijktijdigheid. Een eenvoudig gedachte-experiment maakt dat duidelijk.

Stel, een trein rijdt met een grote, constante snelheid. In de trein, in de lengterichting, staat een lange tafel. Precies midden op de tafel staat een lampje. Aan het linker uiteinde van de tafel zit waarnemer W1, aan het rechter uiteinde zit W2. Een derde waarnemer, W3, staat stil op het perron. Juist als het lampje W3 passeert geeft het een lichtflits.

W1 en W2 merken de flits tegelijkertijd op. Ze zitten immers precies even ver van het lampje en ze bewegen met de trein mee. Voor W3 is het anders. Die beweegt niet met de trein mee. Dus in de tijdsduur die de lichtflits nodig heeft om de uiteinden van de tafel te bereiken, heeft de trein zich ten opzichte van W3 iets naar rechts verplaatst. W3 vindt nu dat de flits naar het rechter uiteinde (dus naar W2) een langere weg moet afleggen dan naar het linker uiteinde (naar W1). Omdat de waarde van de lichtsnelheid invariant is, moet W3 concluderen dat W2 de lichtflits later ziet dan W1.

Dus: wat voor W1 en W2 gelijktijdig is, is het voor W3 niet. <u>Gelijktijdigheid is dus niet absoluut</u>.



Ruimtetijd

De speciale relativiteitstheorie heeft ons wereldbeeld, onze kijk op ruimte en tijd, ingrijpend veranderd.

- Ruimte en tijd zijn niet meer de absolute, objectieve achtergrond waartegen processen zich afspelen. Hoe je ruimte en tijd waarneemt hangt af van je snelheid. Zie bijlage 2.
- Ruimte en tijd zijn niet meer objectief te scheiden. De vier dimensies *x, y, z* en *t* zijn aan elkaar gekoppeld en vormen samen een vierdimensionale ruimte: de <u>ruimtetijd</u>.

Toch heeft tijd een speciale positie. Die blijkt uit het volgende.

Natuurwetten hebben voor *x, y* en *z* geen voorkeursrichting. De val van een bal bijvoorbeeld, loodrecht omlaag, beschrijf je met de wet van behoud van energie: $E_z \rightarrow E_k + Q$ (zwaarte-energie wordt omgezet in kinetische energie plus warmte). De beweging is ook in omgekeerde richting mogelijk. Je kunt dezelfde bal immers ook loodrecht omhoog gooien. Voor de beweging in omgekeerde richting gebruik je dezelfde wet (maar dan omgekeerd): $E_k \rightarrow E_z + Q$.

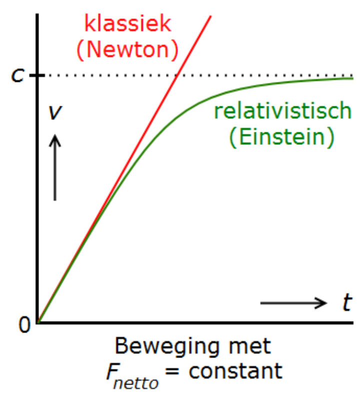
Bij tijd is dat anders. Tijd heeft maar één richting: een oorzaak komt altijd vóór het gevolg. Die volgorde kun je niet omkeren. Verder zegt de zogeheten tweede hoofdwet van de thermodynamica dat spontane processen altijd zó verlopen, dat de wanorde toeneemt. Dat geeft aan de tijd een richting.

Bijvoorbeeld: een glas water valt om en je hebt dat op video. Als je de video terugdraait zie je het omgekeerde proces: de plas water verzamelt zich en springt vanzelf in het glas, keurig geordend. Dat zoiets spontaan gebeurt is buitengewoon onwaarschijnlijk, want de wanorde neemt áf. De tweede hoofdwet wordt gebroken.

Massa

Nog een gedachte-experiment: Als op een voorwerp, bijvoorbeeld een deeltje in een deeltjesversneller, een constante nettokracht <u>blijft</u> werken, dan zou het volgens de klassieke theorie <u>blijven</u> versnellen: zie de lineaire grafieklijn hiernaast. Maar het is niet mogelijk deeltjes te versnellen tot een snelheid gelijk aan of groter dan *c.* Daarom nadert de werkelijke, relativistische grafieklijn asymptotisch de lijn $v=c$. Het deeltje bereikt dus nooit de lichtsnelheid.

Verder laat de relativistische grafieklijn zien: Hoe groter *v,* hoe kleiner de steilheid van de lijn, dus hoe kleiner de versnelling van het deeltje. Bij constante nettokracht betekent dat blijkbaar dat het deeltje zich bij hoge snelheden steeds sterker tegen de kracht verzet. Een deeltje dat ten opzichte van de waarnemer snel beweegt, gedraagt zich dus alsof het een grotere massa m' heeft.



$$m' = \gamma \cdot m$$

In de uitdrukking $\gamma \cdot m$ is m de <u>rustmassa</u> van het deeltje: de massa die een waarnemer meet die ten opzichte van het deeltje stil staat. De uitdrukking $\gamma \cdot m$ noem je de <u>relativistische massa</u>. Hoe sneller het deeltje gaat, hoe groter γ, dus hoe groter zijn relativistische massa. Voor 'gewone' snelheden is m' (vrijwel) gelijk aan *m.*

(Let op: massa is hier: verzet tegen snelheidsverandering, ook wel *trage* massa. Dus niet: hoeveelheid materie).

Impuls

Omdat de relativistische massa *(m')* afhangt van de snelheid *(v)*, voldoet bij hoge snelheden de klassieke formule voor de impuls *(p = m·v)* niet meer. De relativistische impuls bereken je met:

$$p = \gamma \cdot m \cdot v$$

Energie

Einstein liet zien dat de totale energie van een deeltje met rustmassa *m* en snelheid *v* gelijk is aan:

$$E_{totaal} = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \cdot m \cdot c^2$$

Hieruit volgt dat deeltjes met rustmassa de lichtsnelheid niet kunnen bereiken. Immers, als $v = c$ wordt γ oneindig, dus E_{totaal} ook. Je zou dus oneindig veel energie nodig hebben om zo'n deeltje de lichtsnelheid te geven.
Verder volgt voor een deeltje in rust, dus met $v = 0$ dus $\gamma = 1$:

$$E_{rust} = m \cdot c^2$$

Dit is een van de beroemdste formules uit de wetenschap, met als opzienbarende boodschap: <u>energie en massa zijn equivalent</u>. Je kunt ze in elkaar omrekenen. Zie bijlage 5.
De energie bij $v = 0$ heet <u>rustenergie</u>. Zie het als 'gestolde' energie. Rustenergie kan, zoals elke andere energiesoort, worden omgezet in andere vormen van energie. Dat gebeurt bijvoorbeeld in sterren (zoals de zon) en in kerncentrales. Andersom wordt bij paarvorming stralingsenergie omgezet in rustenergie van een elektron-positron-paar.
Een bewegend deeltje heeft dus rustenergie en kinetische energie. Uit de twee voorgaande formules volgt nu voor de kinetische energie:

$$E_k = (\gamma - 1) \cdot m \cdot c^2$$

Relativistische mechanica

De invariantie van de lichtsnelheid levert een compleet nieuwe mechanica op, met voor bekende grootheden zoals Δt, Δx en m nieuwe formules in plaats van de klassieke. Je noemt die mechanica *relativistische mechanica.*
De tabel vergelijkt de relativistische mechanica van Einstein met de klassieke mechanica van Newton. Als $v \ll c$ dan is $\gamma \approx 1$ en gaat de relativistische mechanica over in de klassieke.

Klassiek ($v \ll c$)	**Relativistisch ($v > 0{,}5 \cdot c$)**
$\Delta t = \Delta t'$	$\Delta t = \Delta t' \cdot \gamma$
$\Delta x = \Delta x'$	$\Delta x = \Delta x' / \gamma$
$E_k = ½ \cdot m \cdot v^2$	$E_{tot} = \gamma \cdot m \cdot c^2 \rightarrow$ $E_{rust} = m \cdot c^2$ $E_k = (\gamma - 1) \cdot m \cdot c^2$
$p = m \cdot v$	$p = \gamma \cdot m \cdot v$ $= \gamma \cdot \beta \cdot m \cdot c = \beta \cdot E_{tot} / c$
m	$\gamma \cdot m$
$F_{netto} = m \cdot a$	$F_{netto} = \gamma^3 \cdot m \cdot a$
$v_{tot} = v_1 + v_2$	$v_{tot} = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 \cdot v_2)/c^2}$

Relativistische factoren	
$\beta = \dfrac{v}{c}$	$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$$E = mc^2$$

Snelheden relativistisch optellen

Stel, een ruimteschip reist ten opzichte van de aarde met een constante snelheid van $0{,}80 \cdot c$ door de ruimte. Vanuit het ruimteschip wordt een kleine verkenningsraket gelanceerd. Ten opzichte van het ruimteschip krijgt de verkenner een constante snelheid van $0{,}40 \cdot c$, in dezelfde richting.
Klassiek gesproken zou de verkenner dan een snelheid van $1{,}20 \cdot c$ ten opzichte van de aarde krijgen, een waarde groter dan de lichtsnelheid dus. Relativistisch bezien ligt dat anders (zie de laatste regel van de tabel):

$$v_{verkenner\ tov\ aarde} = \frac{0{,}80 \cdot c + 0{,}40 \cdot c}{1 + (0{,}80 \cdot c \cdot 0{,}40 \cdot c)/c^2} = \frac{1{,}20 \cdot c}{1 + 0{,}32} = 0{,}91 \cdot c$$

1 Inertiaalstelsels – De postulaten van Einstein

Een *(x,y,z)*-coördinatenstelsel en een klok zijn samen een plaats-tijd-referentiesysteem. Dat heb je nodig om bewegingen te kunnen beschrijven. *Inertiaalstelsels* zijn referentiesystemen die ten opzichte van elkaar stilstaan of eenparig, rechtlijnig bewegen. In zulke stelsels geldt de eerste wet van Newton: voorwerpen versnellen alleen als er een nettokracht op werkt. Bijvoorbeeld: zolang een auto met 100 km/h over een rechte snelweg rijdt, is hij een inertiaalstelsel. Als hij snel afremt niet meer, want de inzittenden schieten naar voren, zonder nettokracht.
De postulaten van Einstein kun je nu ook zo formuleren:

1. Inertiaalstelsels zijn gelijkwaardig. Je kunt niet zeggen welk stelsel beweegt en welk stelsel stil staat. Dus in elk inertiaalstelsel zijn de natuurwetten hetzelfde.
2. De lichtsnelheid is invariant: in elk inertiaalstelsel is hij even groot.

Toch noem je je eigen stelsel (het stelsel van de waarnemer) vaak het stilstaande stelsel. Grootheden in het vreemde, bewegende stelsel geef je dan een accent ('), grootheden in je eigen, stilstaande stelsel niet. (Zie bijv. bijlage 2, 3 en 4).

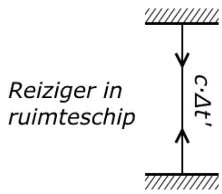
2 Transformaties

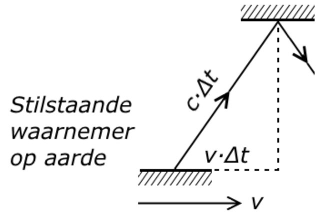
Resultaten van metingen, gedaan in het ene inertiaalstelsel, kun je met een zogeheten *transformatie* omrekenen naar een ander inertiaalstelsel. Voor klassieke mechanica is dat de Galileï-transformatie, voor relativistische mechanica de Lorentz-transformatie.
Stel je twee *(x,y,z)*-inertiaalstelsels voor. Jij bevindt je in stelsel S. In stelsel S meet een klok de tijd t, in het andere stelsel, S', meet een andere, identieke klok de tijd t'. Stelsel S' beweegt eenparig met snelheid v in de richting van de positieve x-assen. Op $t = 0$ geldt ook dat $t' = 0$ en valt S samen met S'. Dan geldt op een later tijdstip t:

- Klassiek, de Galileï-transformatie: $x' = x - v \cdot t$ $\quad y' = y$ $\quad z' = z$ $\quad t' = t$
- Relativistisch, de Lorentz-transformatie: $x' = \gamma \cdot (x - \beta \cdot c \cdot t)$ $\quad y' = y$ $\quad z' = z$ $\quad c \cdot t' = \gamma \cdot (c \cdot t - \beta \cdot x)$

3 Afleiding van de formule voor tijdrek

Stel, een ruimteschip passeert de aarde met constante snelheid v. In het ruimteschip staat een lichtklok: twee evenwijdige spiegels waartussen een foton verticaal heen en weer kaatst.
Zie de bovenste figuur hiernaast: De ruimtereiziger meet met zijn eigen klok dat het foton in tijdsduur $\Delta t'$ van onder naar boven gaat. Zie de tweede figuur: Een stilstaande, aardse waarnemer ziet het ruimteschip bewegen en vindt dus dat het foton niet recht maar schuin naar boven gaat. Hij meet met zijn aardse klok een langere tijdsduur Δt voor het schuine, langere traject van het foton van onder naar boven, want c is invariant.
Vergelijk de figuren en pas Pythagoras toe:



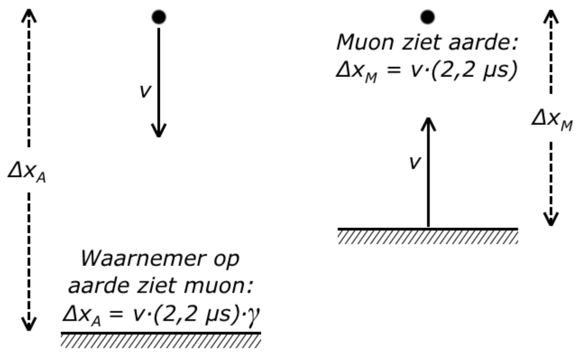


$$c^2 \cdot \Delta t'^2 + v^2 \cdot \Delta t^2 = c^2 \cdot \Delta t^2 \quad \rightarrow \quad \frac{c^2 \cdot \Delta t'^2}{\Delta t^2} + v^2 = c^2 \quad \rightarrow$$

$$\frac{\Delta t'^2}{\Delta t^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad \rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \rightarrow \quad \Delta t = \Delta t' \cdot \gamma$$

4 Afleiding van de formule voor lengtekrimp

Muonen zijn instabiel. De gemiddelde levensduur van een muon is *in zijn eigen stelsel* 2,2 μs.
Stel, een muon komt met constante snelheid v verticaal op het aardoppervlak af. Zie de figuren hiernaast.



- Een stilstaande waarnemer op aarde constateert tijdrek. Hij/zij meet dat het muon in zijn levensduur van 2,2 μs een afstand Δx_A aflegt waarvoor geldt:

  $\Delta x_A = v \cdot \Delta t = v \cdot \Delta t' \cdot \gamma = v \cdot (2{,}2\,\mu s) \cdot \gamma$.

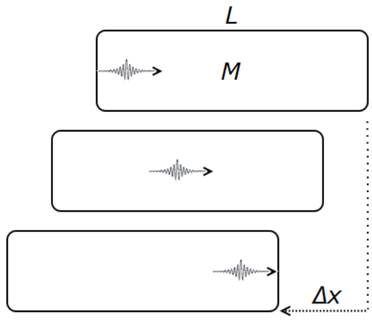
- Het muon ziet in diezelfde tijd de aarde met een snelheid v op zich af komen en een afstand Δx_M afleggen, waarvoor geldt:

  $\Delta x_M = v \cdot (2{,}2\,\mu s)$.

- Hieruit volgt: $\dfrac{\Delta x_M}{\Delta x_A} = \dfrac{v \cdot 2{,}2}{v \cdot 2{,}2 \cdot \gamma} \quad \rightarrow \quad \Delta x_M = \dfrac{\Delta x_A}{\gamma}$ $\qquad$ Ofwel, vanuit het muon bezien: $\Delta x = \dfrac{\Delta x'}{\gamma}$

5 Afleiding van de formule voor rustenergie

Met een gedachte-experiment (van Einstein, gepubliceerd in 1906) kun je de formule voor de rustenergie, $E = m{\cdot}c^2$, afleiden.
Zie de figuur. De linkerwand van een doos met massa M en lengte L zendt een foton uit. Dat wordt een tijdje later door de rechterwand geabsorbeerd. Op de doos en het foton werken geen externe krachten, dus er geldt impulsbehoud.
Het foton had bij vertrek een impuls $p_{foton} = h/\lambda = E/c$. Er is impulsbehoud, dus de doos krijgt bij het vertrek een impuls ('terugslag') $p_{doos} = -E/c$. Voor deze impuls kun je ook schrijven: $p_{doos} = M{\cdot}v$. Nu volgt:



$$M{\cdot}v = -E/c \quad \rightarrow \quad v = -E/(M{\cdot}c)$$

Op het moment dat de rechterwand het foton absorbeert, komt de doos weer tot stilstand. De doos is intussen naar links verplaatst over een afstand

$$\Delta x = v{\cdot}\Delta t = v{\cdot}L/c = -E{\cdot}L/(M{\cdot}c^2)$$

Omdat er geen externe krachten op de doos en het foton werken, moet het gemeenschappelijke zwaartepunt op zijn plaats blijven. Dat kan alleen als er met het foton niet alleen energie maar ook massa naar rechts is verplaatst. Als je deze massa m noemt, en het gemeenschappelijke zwaartepunt blijft op zijn plaats, dan moet gelden:

$$m{\cdot}L = -M{\cdot}\Delta x \quad \rightarrow \quad m{\cdot}L = -M{\cdot}[-E{\cdot}L/(M{\cdot}c^2)] \quad \rightarrow \quad E = m{\cdot}c^2$$

(Opmerkingen:
- L moet eigenlijk $L-\Delta x$ zijn, maar L dus ook $L-\Delta x$ valt weg.
- Als de linkerwand van de doos een foton uitzendt, neemt M een heel klein beetje af. Maar ook M valt weg).

6 Vier opgaven

1. <u>Lengtekrimp</u>
   Bijlage 4 geeft voor bewegende muonen de afleiding van de formule voor lengtekrimp.
   – Leg uit dat deze afleiding niet alleen voor muonen geldt maar algemeen geldig is.

2. <u>Snelheid</u>
   Laat met behulp van de relativistische formule voor het optellen van snelheden zien:
   a. Als $v_1 \ll c$ en $v_2 \ll c$ dan is de relativistische formule (bijna) gelijk aan de klassieke ($v_{tot} = v_1 + v_2$).
   b. Als $v_1 = c$ dan geldt, onafhankelijk van v_2: $v_{tot} = c$.

3. <u>$E^2 - p^2{\cdot}c^2 = m^2{\cdot}c^4$</u>
   a. Leid uit $E_{tot} = \gamma{\cdot}m{\cdot}c^2$ en $p = \beta{\cdot}E/c$ af dat geldt: $E^2 - p^2{\cdot}c^2 = m^2{\cdot}c^4$.
   b. Leid uit $E^2 - p^2{\cdot}c^2 = m^2{\cdot}c^4$ af dat massaloze deeltjes, zoals fotonen, niet kunnen stilstaan maar altijd bewegen met de lichtsnelheid.
   c. Leid uit $E^2 - p^2{\cdot}c^2 = m^2{\cdot}c^4$ en nog een andere formule (die je al langer kent) af dat voor fotonen geldt: $E = h{\cdot}f$.

4. Toon met $E_{tot} = \gamma{\cdot}m{\cdot}c^2$ aan dat alleen deeltjes met $m = 0$ de lichtsnelheid kunnen hebben.

7 Meer weten?

Zie bijvoorbeeld:

- Albert Einstein (1997). *Einstein: mijn theorie. Over de speciale en algemene relativiteitstheorie.* (4e druk). Utrecht: Het Spectrum. ISBN 90-274-5758-1
  Eerder uitgegeven als Aula-pocket (1978) en Aula-paperback (1986, 1987) onder de titel *Relativiteit.*
  Voor het eerst verschenen in 1916 als *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie.*
- Sander Bais (2007). *De sublieme eenvoud van relativiteit.* Amsterdam University Press. ISBN 978 90 5356992 4
  Een boekje met een begrijpelijke, visuele inleiding op de Speciale Relativiteitstheorie, aan de hand van zogeheten Minkowski-diagrammen. Je vindt daar ook een afleiding van de Lorentz-transformatie en van de formule voor het relativistisch optellen van snelheden.
- Marcel Vonk (2015). *Dossier: Relativiteit.* https://www.quantumuniverse.nl/dossier-relativiteit
- Jan Stuivenberg. *Relativiteitstheorie.* https://www.natuurkunde.nl/artikelen/2001/relativiteitstheorie